(N)

1. Наћи опште решење д.ј. $y''+2py'+y=(4-6x)e^{-x}$ у зависности од вредности реалног параметра p.

МЗ-7.2.2001.

Решење:

За хомогену: $r^2+2pr+1=0 \Rightarrow r_{1/2}=-p\pm\sqrt{p^2-1}$

за $|p|>1$, $r_1,r_2\in R$, $r_1\neq r_2$, $y_h=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

за $|p|=1$, $r_1=r_2=-p$, $\boxed{y_h=e^{-px}(C_1+C_2x)}$ $\quad p=0 \quad r_{1/2}=0\pm i$

~~за $|p|<1$, $r_{1/2}=-p\pm i\sqrt{1-p^2}$, $y_h=e^{-px}\left(C_1\cos(\sqrt{1-p^2}\,x)+C_2\sin(\sqrt{1-p^2}\,x)\right)$~~

За нехомогену: $f(x)=(4-6x)e^{-x}$ $\quad y_h=e^{ax}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

$-p\pm\sqrt{p^2-1}=-1$

$\pm\sqrt{p^2-1}=p-1$

$p^2-1=p^2-2p+1$

$2p=2 \Rightarrow p=1$

за $p\neq 1$, $-1\notin\{r_1,r_2\}$

$$\left.\begin{aligned} y_p&=(Ax+B)e^{-x}\\ y_p'&=[-Ax+(A-B)]e^{-x}\\ y_p''&=[Ax+(B-2A)]e^{-x}\end{aligned}\right\}\text{ замена у д.ј.}$$

$$[Ax+(B-2A)]e^{-x}+2p[-Ax+(A-B)]e^{-x}+(Ax+B)e^{-x}\equiv(4-6x)e^{-x}$$

$$\underbrace{2A(p-1)}_{-6}x+\underbrace{2(A-B)(p-1)}_{4}\equiv 4-6x \Rightarrow A=\frac{-3}{p-1},\quad B=\frac{-5}{p-1};\quad y_p=\frac{-3x-5}{p-1}e^{-x}$$

За $p=1$, $r_1=r_2=-1$

$$\left.\begin{aligned} y_p&=(Ax+B)\cdot e^{-x}\cdot x^2=(Ax^3+Bx^2)e^{-x}\\ y_p'&=(-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)e^{-x}\\ y_p''&=(Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B)e^{-x}\end{aligned}\right\}\text{ замена у д.ј.}$$

$$[Ax^3+(B-6A)x^2+(6A-4B)x+2B]e^{-x}+2[-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx]e^{-x}+(Ax^3+Bx^2)e^{-x}\equiv(4-6x)e^{-x}$$

$$x^3\cdot 0+x^2\cdot 0+x\cdot 6A+2B=4-6x \Rightarrow B=2,\ A=-1,\quad y_p=(2-x)x^2e^{-x}$$

$\boxed{\text{РЕШЕЊЕ}}$

1° $|p|>1$, $y=C_1e^{(-p+\sqrt{p^2+1})x}+C_2e^{(-p-\sqrt{p^2+1})x}+\dfrac{3x+5}{1-p}e^{-x}$

2° $p=1$, $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+(2-x)x^2e^{-x}$

3° $p=-1$, $y=e^{x}(C_1+C_2x)+\dfrac{3x+5}{2}e^{-x}$

4° $|p|<1$, $y=e^{-px}\left(C_1\cos(x\sqrt{1-p^2})+C_2\sin(x\sqrt{1-p^2})\right)+\dfrac{3x+5}{1-p}e^{-x}$

2. Наћи опште решење д.ј. $y''' + py' = 1 + e^x$ у зависности од вредности реалног параметра p.

2 $y''' + py' = 1 + e^x$

$r^3 + pr = 0$

$r(r^2 + p) = 0$

1 $p > 0$

$r_1 = 0 \quad r_{2,3} = \sqrt{-p}$

$y = C_1 + C_2 \cos\sqrt{p}\,x + C_2 \sin\sqrt{p}\,x$

2 $p = 0$

$r_1 = r_2 = r_3 = 0$

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$

3 $p < 0 \quad r_{2,3} \in R$

$y = C_1 + C_2 e^{\sqrt{-p}\,x} + C_3 e^{-\sqrt{-p}\,x}$

8

Нехом:

$f_1 = 1 \cdot e^0, \quad 0 = r_1$ за $p \neq 0$

$y_p = A \cdot x \quad y_p' = A \quad y''' = 0$

дј: $p \cdot A = 1$

$A = 1/p \qquad y_p = \frac{1}{p} \cdot x$

за $p = 0 \quad 0 = r_1 = r_2 = r_3$

$y_p = A \cdot x^3 \quad y_p' = 3Ax^2 \quad y''' = 6A$

дј: $6A + p = 1$

$A = 1/6 \qquad y_p = \frac{1}{6}x^3$

8

$f_2 = e^x, \quad 1 = \sqrt{-p} \quad p = -1$

$1 = r_2$

$y_p = Ae^x \cdot x$

$y_p' = Ae^x(x+1)$

$y_p'' = Ae^x(x+2)$

$y_p''' = Ae^x(x+3)$

$Ae^x(x+3) + pAe^x(x+1) = e^x$

$\cancel{Ax} + 3A + \cancel{Apx} + Ap = 1$

$2A = 1$

$A = 1/2 \qquad y_p = \frac{1}{2}xe^x$

$p \neq -1 \quad 1 \notin \{r_1, r_2, r_3\}$

$y_p = Ae^x$

$Ae^x + pAe^x = e^x$

$A(1+p) = 1$

$A = \frac{1}{1+p}$

$y_p = \frac{1}{1+p}e^x$

решење:

9

1) $p = 0 \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \underbrace{\frac{1}{6}x^3}_{f_1} + \underbrace{e^x}_{f_2}$

2) $p = -1 \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - x + \frac{1}{2}xe^x$

3) $p > 0 \quad y = C_1 + C_2 \cos(x\sqrt{p}) + C_3 \sin(x\sqrt{p}) + \frac{1}{p}x + \frac{1}{1+p}e^x$

4) $p \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

$$y = C_1 + C_2 e^{\sqrt{-p}\cdot x} + C_3 e^{-\sqrt{-p}\,x} + \frac{1}{p}x + \frac{1}{1+p}e^x$$

2

3 Дата је д.ј. $x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0$.
Сменом $y(x)=g(x)\cdot u(x)$ увести нову непознату функцију $u(x)$ тако да у добијеној једначини не учествује члан са првим изводом. Нађи затим опште решење дате једначине.

Решење:

$y(x)=g(x)\cdot u(x)$; $y'=g'\cdot u+g\cdot u'$; $y''=g''u+2g'u'+gu''$

д.ј. $x^2[g''u+2g'u'+gu'']+2x^2\cdot[g'u+gu']+(x^2-2)g\cdot u=0$

$$x^2gu''+\underbrace{(2x^2g'+2x^2g)}_{=0}u'+(x^2g''+2x^2g'+(x^2-2)g)u=0$$

$2x^2(g'+g)=0$

$\frac{dg}{dx}+g=0$

$\int\frac{dg}{g}=\int-dx+C_1$

$\ln|g|=-x+C_1$

$g(x)=e^{-x+C_1}=e^{-x}\cdot C$

нека је $C=1$

$g(x)=e^{-x}$

$x^2e^{-x}u''+[x^2e^{-x}+2x^2(-e^{-x})+(x^2-2)e^{-x}]u=0$

$x^2u''-2u=0$ Ојлерова д.ј.

смена $x=e^t$, ... своди се на

$\ddot{u}-\dot{u}-2u=0$ д.ј. са констант. коефиц.

$r^2-r-2=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2$

$u(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$

$u(x)=C_1\cdot\frac{1}{x}+C_2x^2$

$y=e^{-x}\cdot u(x)$ $\quad y(x)=C_1\frac{1}{xe^x}+C_2\frac{x^2}{e^x}$

---

4 Дата је д.ј. $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Увести смену независно променљиве $t=g(x)$ тако да добијена д.ј. не садржи први извод.

Решење:

$t=g(x)$; $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}g'(x)$; $y''=\frac{d}{dx}(\dot{y}\cdot g'(x))=\ddot{y}\cdot g'\cdot g'+\dot{y}g''$

д.ј.: .... $(1+x^2)^2(g')^2\ddot{y}+\underbrace{[(1+x^2)^2g''+2x(1+x^2)g']}_{=0}\dot{y}+y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$(1+x^2)g''+2xg'=0$

$(1+x^2)\frac{dg'}{dx}=-2xg'$

$\int\frac{dg'}{g'}=\int\frac{-2x\,dx}{1+x^2}+C_1$

$\ln|g'|=-\ln(1+x^2)+C_1$

$g'=\frac{1}{1+x^2}\cdot C_1$

$g=\int C_1\frac{dx}{1+x^2}+C_2$

$g(x)=C_1\operatorname{arctg}x+C_2$

$g(x)=\operatorname{arctg}x=t$

$x=\operatorname{tg}t$

д.ј. ... $\ddot{y}+y=\sin t$

$r_{1,2}=\pm i$ $\quad y_{hom}=C_1\cos t+C_2\sin t$

нехом: $f(t)=\sin t$, $\alpha+i\beta=i=r_1 \Rightarrow s=1$

$y_p=(A\cos t+B\sin t)\cdot t$ ...... $\Rightarrow y_p=-\frac{1}{2}t\cos t$

$y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$

$y(x)=C_1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C_2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

опште решење

5. Smenom nezavisno promenljive $x^2=t$ naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+\left(4x-\frac{1}{x}\right)y'+4x^2y=3xe^{-x^2}$

Rešenje:

$x^2=t$, $x=\sqrt{t}$, $\frac{dt}{dx}=2x=2\sqrt{t}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}\cdot 2\sqrt{t}$

$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t}\,\dot{y}\right)\frac{dt}{dx}=\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\dot{y}+2\sqrt{t}\cdot\ddot{y}\right)2\sqrt{t}=2\dot{y}+4t\ddot{y}$

$y''+\left(4x-\frac{1}{x}\right)y'+4x^2y=3xe^{-x^2}$

$(2\dot{y}+4t\ddot{y})+\left(4\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\cdot 2\sqrt{t}\,\dot{y}+4ty=3\sqrt{t}\,e^{-t}$

$\cancel{2\dot{y}}+4t\ddot{y}+8t\dot{y}-\cancel{2\dot{y}}+4ty=3\sqrt{t}\,e^{-t}\ /:4t$

$\underline{\ddot{y}+2\dot{y}+y=\frac{3}{4\sqrt{t}}e^{-t}}$ linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Za homogenu jednačinu:

$\ddot{y}+2\dot{y}+y=0$, $r^2+2r+1=0$, $(r+1)^2=0$, $r_1=r_2=-1$, $y_{hom}=(C_1+C_2t)e^{-t}$

Za nehomogenu: $f(t)=\frac{3}{4\sqrt{t}}e^{-t}$, pa ćemo jedno partikularno rešenje nehomogene naći koristeći metod varijacije konstanata.

$y=C_1(t)e^{-t}+C_2(t)te^{-t}$ opšte rešenje nehomogene

$$C_1'(t)e^{-t}+C_2'(t)te^{-t}=0 \qquad C_1'(t)+C_2'(t)\cdot t=0$$

$$-C_1'(t)e^{-t}+C_2'(t)(1-t)e^{-t}=\frac{3}{4\sqrt{t}}e^{-t} \qquad -C_1'(t)+C_2'(t)(1-t)=\frac{3}{4\sqrt{t}}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & t\\ -1 & 1-t\end{vmatrix}=1-t-(-t)=1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & t\\ 3/4\sqrt{t} & 1-t\end{vmatrix}=-\frac{3}{4}\sqrt{t} \qquad C_1'(t)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{3}{4}\sqrt{t}$$

$$C_1(t)=\int-\frac{3}{4}t^{1/2}dt+D_1=-\frac{3}{4}\frac{t^{3/2}}{3/2}+D_1=-\frac{1}{2}t^{3/2}+D_1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3/4\sqrt{t}\end{vmatrix}=\frac{3}{4\sqrt{t}} \qquad C_2'(t)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{3}{4\sqrt{t}}$$

$$C_2(t)=\int\frac{3}{4}t^{-1/2}dt+D_2=\frac{3}{4}\frac{t^{1/2}}{1/2}+D_2=\frac{3}{2}\sqrt{t}+D_2 \quad (D_1,D_2\in R)$$

$y=C_1(t)e^{-t}+C_2(t)te^{-t}$

$y=\left(-\frac{1}{2}t^{3/2}+D_1\right)e^{-t}+\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}+D_2\right)te^{-t}=D_1e^{-t}+D_2te^{-t}+t^{3/2}e^{-t}$

$$\boxed{y=\underbrace{D_1e^{-x^2}+D_2x^2e^{-x^2}}_{y_{hom}}+\underbrace{x^3e^{-x^2}}_{y_p}}$$

6. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

$$x^3y''' + 2x^2y' - 2y = 3x + x^2\ln x\,,\quad (x>0)$$

<u>Решење:</u>

---

(2) $x^3y''' + 2xy' - 2y = 3x + x^2\ln x$ Ојлерова д.ј.

$x = e^t\,,\quad y(x) \to y(t) \qquad x'_t = e^t \quad t'_x = e^{-t}$ (2)

$y' = \dot{y}\cdot t_x = \dot{y}e^{-t}$ 3

$y'' = (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$ 3

$y''' = \left[-2e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}) + e^{-2t}(\dddot{y} - \ddot{y})\right]e^{-t} = (\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})e^{-3t}$ 4 (10)

$e^{3t}e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) + 2e^t\dot{y}e^{-t} - 2y = 3e^t + e^{2t}\cdot t$

$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 4\dot{y} - 2y = 3e^t + te^{2t}$ (4)

$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$

$r^3 - r^2 - 2r^2 + 2r + 2r - 2 = 0$

$(r^2 - 2r + 2)(r-1) = 0$

$r_1 = 1\,,\quad r_{2,3} = \dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$

$y_{хом} = C_1e^t + e^t(C_2\cos t + C_3\sin t)$ (6)

<u>Нехом.</u> $f_1 = 3e^t\,,\ 1 = r_1$

$y_1 = Ae^t\cdot t$

$\dot{y}_1 = Ae^t(t+1)$

$\ddot{y}_1 = Ae^t(t+1+1)$

$\dddot{y}_1 = Ae^t(t+3)$

д.ј.: $Ae^t(t+3) - 3Ae^t(t+2) + 4e^tA(t+1) - 2Ate^t = 3e^t$

$\cancel{At} + 3A - \cancel{3At} - 6A + \cancel{4At} + 4A - \cancel{2At} = 3$

$A = 3 \qquad y_1 = 3te^t$ (5)

$f_2 = te^{2t}\,,\ 2 \notin \{r_1, r_2\}$

$y_2 = (At+B)e^{2t}$

$\dot{y}_2 = e^{2t}(2At + 2B + A) = e^{2t}(2At + (2B+A))$

$\ddot{y}_2 = e^{2t}(4At + 4B + 2A + 2A) = e^{2t}(4At + 4B + 4A)$

$\dddot{y}_2 = e^{2t}(8At + 8B + 8A + 4A) = e^{2t}(8At + 8B + 12A)$

д.ј.: $8At + 8B + \cancel{12A}$
$-12At - 12B - \cancel{12A}$
$+8At + 8B + 4A$
$-2At - 2B \quad = t$

$2At + 4A + 2B = t$

$2A = 1 \qquad 4A + 2B = 0$

$A = 1/2 \qquad B = -2A = -1$

$y_2 = \left(\frac{1}{2}t - 1\right)e^{2t}$ (4)

<u>Опште реш.</u>

$y = C_1e^t + C_2e^t\cos t + C_3e^t\sin t + 3te^t + \left(\frac{1}{2}t - 1\right)e^{2t}$ (2)

$y(t) = C_1x + C_2x\cos(\ln x) + C_3x\sin(\ln x) + 3x\ln x + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)x^2$. (2)

7. Решити д.ј. $(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -4 - 8x$ по $(2x+1)$ затим наћи партикуларно решење које задовољава услове $y(0)=3$, $y'(0)=6$.

Д. Ј.

$(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -4-8x$ Ојлерова д.ј.

смена $2x+1 = e^t$ $t = \ln(2x+1)$ $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}$

$y' = \dot{y}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{2}{2x+1} = 2e^{-t}\dot{y}$

$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(y')\cdot\frac{dt}{dx} = (2e^{-t}\dot{y})'_t\cdot 2e^{-t}$

$= (-2e^{-t}\dot{y} + 2e^{-t}\ddot{y})\cdot 2e^{-t} = 4e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})$

д.ј. $e^{2t}\cdot 4e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}) - 4e^t\cdot 2e^{-t}\dot{y} + 8y = -4-8x$

$4\ddot{y} - 4\dot{y} - 8\dot{y} + 8y = -4 - 8\cdot\frac{e^t-1}{2}$

$4\ddot{y} - 12\dot{y} + 8y = 4(\cancel{-1} - e^t \cancel{+1}) = -4e^t$

$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = -e^t$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-2)(r-1) = 0$

$r_1 = 2$ $r_2 = 1$ $y_h = C_1e^t + C_2e^{2t}$

$f(t) = -e^t$ $y_p = Ae^t\cdot t$

$y_p' = Ae^t(t+1)$

$y_p'' = Ae^t(t+1+1) = Ae^t(t+2)$

д.ј. $Ae^t(t+2) - 3Ae^t(t+1) + 2Ae^t\cdot t = -e^t$

$\cancel{At} + 2A - \cancel{3At} - 3A + \cancel{2At} = -1$

$-A = -1$

$A = 1$ $y_p = te^t$

$y = C_1e^t + C_2e^{2t} + te^t$

$$\boxed{y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^2 + (2x+1)\cdot\ln(2x+1)}$$ о.р.

$y(0) = C_1 + C_2 + 1\cdot\ln 1 = C_1 + C_2 = 3$

$y'(0) = \left[2C_1 + 2(2x+1)\cdot 2C_2 + 2\cdot\ln(2x+1) + (2x+1)\frac{2}{2x+1}\right]_{x=0}$

$= 2C_1 + 4C_2 + 2 = 6$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4,\ C_2 = -1$

$$\boxed{y_p = 4(2x+1) - (2x+1)^2 + (2x+1)\ln(2x+1)}$$

6

3. $x^2y''+3xy'-py=x^2+\ln x$ Ојлерова g.j. ; смена $x=e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx}=e^{-t}$

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t}$$
$$y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})\frac{dt}{dx}=(\ddot{y}e^{-t}-\dot{y}e^{-t})e^{-t}=e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})$$
} заменимо у g.j.

$$(e^t)^2\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})+3e^t e^{-t}\dot{y}-py=(e^t)^2+\ln(e^t)$$

$\boxed{\ddot{y}+2\dot{y}-py=e^{2t}+t}$ g.j. са константним коефицијентима

$r^2+2r-p=0 \Rightarrow r_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+p}$

решење хомогене g.j.

1° $1+p>0$, тј. $p>-1$, $r_1,r_2\in\mathbb{R}$, $r_1\neq r_2$: $y_h=C_1e^{(-1+\sqrt{1+p})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{1+p})t}$

2° $p=-1$; $r_1=r_2=-1$, $y_h=e^{-t}(C_1+C_2t)$

3° $p<-1$, $r_{1/2}=-1\pm i\sqrt{-1-p}$; $y_h=e^{-t}\left(C_1\cos(\sqrt{-1-p}\,t)+C_2\sin(\sqrt{-1-p}\,t)\right)$

партикуларна решења нехомогене

1) $f_1=e^{2t}$: $2=-1\pm\sqrt{1+p}$, $3=\pm\sqrt{1+p}$, $9=1+p \Rightarrow p=8$ g.j. $\ddot{y}+2\dot{y}-py=e^{2t}$

1° $p=8$, $r_1=2$, $r_2=-4$ $y_1=A\cdot e^{2t}\cdot t$

$y_1'=Ae^{2t}(1+2t)$ $y_1''=Ae^{2t}(4+4t)$

g.j. $Ae^{2t}(4+4t)+2Ae^{2t}(1+2t)-8Ae^{2t}t=e^{2t}$

$6A=1 \Rightarrow A=1/6 \Rightarrow \boxed{y_1=\frac{1}{6}te^{2t}}$

2° $p\neq 8$, $2\notin\{r_1,r_2\}$, $y_2=Ae^{2t}$; $y_2'=2Ae^{2t}$, $y_2''=4Ae^{2t}$

g.j. $4Ae^{2t}+2\cdot 2Ae^{2t}-pAe^{2t}=e^{2t}$

$8A-pA=1 \Rightarrow A=\frac{1}{8-p}$ $\boxed{y_2=\frac{1}{8-p}e^{2t}}$

2) $f_2=t$: $0=-1\pm\sqrt{1+p}$, $1=\pm\sqrt{1+p}$, $1=1+p \Rightarrow p=0$ g.j. $\ddot{y}+2\dot{y}-py=t$

1° $p=0$, $r_1=0$, $r_2=-2$ $y_3=(At+B)\cdot t$ $y_3'=2At+B$ $y_3''=2A$

g.j. $2A+2(2At+B)-0=t$

$4At+2A+2B=t$

$4A=1$ $2A+2B=0$ $\Rightarrow A=1/4$, $B=-1/4$ } $y_3=\frac{1}{4}t(t-1)$

2° $p\neq 0$, $0\notin\{r_1,r_2\}$ $y_4=At+B$ $y_4'=A$ $y_4''=0$

g.j. $0+2A-p(At+B)=t$

$2A-pB-Apt=t$

$2A-pB=0$ $-Ap=1$ $\Rightarrow A=-1/p$

$B=\frac{2A}{p}=-\frac{2}{p^2}$ $\boxed{y_4=-\frac{1}{p}t-\frac{2}{p^2}}$

решење

1. за $p=0$ $y(t)=C_1+C_2e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{2t}+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t$

$\boxed{y(x)=C_1+C_2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}(\ln x)^2-\frac{1}{4}\ln x}$

за $p=8$ $y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-4t}+\frac{1}{6}te^{2t}-\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}$

$\boxed{y(x)=C_1x^2+C_2\frac{1}{x^4}+\frac{1}{6}x^2\ln x-\frac{1}{8}\ln x-\frac{1}{32}}$

за $p=-1$ $y(t)=e^{-t}(C_1+C_2t)+\frac{1}{9}e^{2t}+t-2$

$\boxed{y(x)=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x)+\frac{1}{9}x^2+\ln x-2}$

за $p>-1$, $p\notin\{0,8\}$

$y(t)=C_1e^{(-1+\sqrt{1+p})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{1+p})t}+\frac{1}{8-p}e^{2t}-\frac{1}{p}t-\frac{2}{p^2}$

$\boxed{y(x)=C_1x^{-1+\sqrt{1+p}}+C_2x^{-1-\sqrt{1+p}}+\frac{1}{8-p}x^2-\frac{1}{p}\ln x-\frac{2}{p^2}}$

за $p<-1$,

$y(t)=e^{-t}\left[C_1\cos(\sqrt{-1-p}\cdot t)+C_2\sin(\sqrt{-1-p}\cdot t)\right]+\frac{1}{8-p}e^{2t}-\frac{1}{p}t-\frac{2}{p^2}$

$\boxed{y(x)=\frac{1}{x}\left[C_1\cos(\sqrt{-1-p}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{-1-p}\ln x)\right]+\frac{1}{8-p}x^2-\frac{1}{p}\ln x-\frac{2}{p^2}}$

... опште решење д.ј. $x^2y''-py=x^3$ зависно од ... ти реалног параметра p.

Решење:

$$x^2y''-py=x^3$$

Одговарајућа хомогена је $x^2y''-py=0$, која се решава сменом $x=e^t$ (јер је Ојлерова)

$y'=\dot{y}e^{-t}$

$y''=e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})$

Једначина постаје $\ddot{y}-\dot{y}-py=0$

$r^2-r-p=0$ (карakt. једн)

$r_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$

1° Корени карakt. једначине су реални и различити ако је $1+4p>0$ тј $p>-\frac{1}{4}$

$$y_h=C_1e^{\frac{1+\sqrt{1+4p}}{2}t}+C_2e^{\frac{1-\sqrt{1+4p}}{2}t}$$

Треба се вратити на промењиву x $(t=\ln x)$

2° $1+4p=0$ $p=-\frac{1}{4}$ $y_h=(C_1+tC_2)e^{\frac{1}{2}t}$ $(t=\ln x)$

3° $1+4p<0$

$p<-\frac{1}{4}$ $y_h=e^{\alpha t}[C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t]$

$r_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1+4p}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-(1+4p)}}{2}i$ $\left(\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\sqrt{-(1+4p)}\right)$

$$y_h=e^{\frac{1}{2}t}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{-(1+4p)}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{-(1+4p)}}{2}t\right]$$

Решимо сада нехомогену диф. једначину

$x^2y''-py=x^3$, смена $x=e^t$

која постаје $\ddot{y}-\dot{y}-py=e^{3t}$

Партикуларно решење тражимо у облику

II шос

$y_p=\lambda e^{3t}$ јер за $p\neq 6$ $\alpha=3$ није корен карakt. једн

$\dot{y}_p=3\lambda e^{3t}$

$\ddot{y}_p=9\lambda e^{3t}$ Заменом у д.ј. налазимо

$\lambda=\frac{1}{6-p}$ за $p\neq 6$

Ако је $p=6$ $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1+4p}}{2}=3$ (јесте корен кар. једн.)

за $p=6$

$\ddot{y}-\dot{y}-6y=e^{3t}$

$y_p=\lambda te^{3t}$, $\dot{y}_p=\lambda(e^{3t}+3te^{3t})$

$\ddot{y}_p=\lambda(6e^{3t}+9te^{3t})$

Заменом у диф. једн. налазимо $\lambda=\frac{1}{5}$

$r^2-r-6=0$

$r_1=-2$ $y_h=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}$, $y_p=\frac{1}{5}\lambda te^{3t}$

$r_2=3$

за $p=6$ Опште решење $y=y_h+y_p$

Ако се вратимо на промењиву x $(t=\ln x)$ имамо:

I $\boxed{\text{за } p>-\frac{1}{4}\ \land\ p\neq 6}$ $y=C_1X_1^{\frac{1+\sqrt{1+4p}}{2}}+C_2X^{\frac{1-\sqrt{1+4p}}{2}}+\frac{1}{6-p}X^3$

за $\underbrace{p>-\frac{1}{4}\ \text{и}\ p=6}_{\text{тј за } p=6}$ $y=C_1X_1^{\frac{1+\sqrt{1+4p}}{2}}+C_2X^{\frac{1-\sqrt{1+4p}}{2}}+\frac{1}{5}X^3\ln x$

II за $p=-\frac{1}{4}$ $y=y_h+y_p$

$y=(C_1+C_2\ln x)\sqrt{x}+\frac{1}{6-p}x^3$ $\left(p=-\frac{1}{4}\right)$

$y=(C_1+C_2\ln x)\sqrt{x}+\frac{4}{25}x^3$

III за $p<-\frac{1}{4}$

$$y=\sqrt{x}\left[C_1\cos\ln x^{\frac{\sqrt{-(1+4p)}}{2}}+C_2\sin\ln x^{\frac{\sqrt{-(1+4p)}}{2}}\right)+\frac{1}{6-p}X^3$$